Om

Fleerheden af collective Stemmer,

og

Probabiliteten af samme.

Ved

J. N. Tetens.

§. 1.

Naar et bestemt Antal af Stemmer (N) haves til Sagens Afgiørelse, enten for Ja eller Nei, uden at fordele dem i flere end tvende modsatte Classer af bekræftende eller benegtende Stemmer, saa kan der gives forskiellige Bestemmelser af den Forhold, som Antallet af den ene Classe skal have til Antallet af den anden, paa det at samme skal antages som den afgiørende Majoritet (Overstemning).

§. 2.

Lad Tallet paa den ene Deel af Stemmer være $= A$, saa at det modsatte bliver $= N - A$, da kan Forholden mellem A og N, eller mellem A og $N - A$ paa adskillige Maader bestemmes, paa det at A skulde udgiøre Majoriteten. Sæt den skal være $= A : N - A = m : n$ i det mindste, paa det at A bliver Majoriteten, eller da A er større end $N - A$ i alle Tilfælde, hvori Majoriteten dependerer af Fleerheden, man da har i det mindste $A : N - A = n + d : n$, saa følger:

1) At

1) At man maa i det mindste have $A = \frac{n+d}{2n+d} \cdot N$.

2) Naar kun $A = \frac{n}{2n+d} \cdot N$, eller mindre end samme, saa har A Minoriteten.

3) Naar $A > \frac{n}{2n+d} \cdot N$, men $< \frac{n+d}{2n+d} \cdot N$, saa har man Stemmernes Liighed eller Pariteten, hvorved Sagen, hvorom der stemmes, bliver uafgiort og ubestemt, enten den skal skee eller ikke skee; den bliver henstilt, omendskiønt Henstillelsen for denne Gang kan have den samme Virkning, som at negte at den ikke skal foretages.

Den mindste Forskiel for at A har Majoriteten maa være $\frac{n+d}{2n+d} \cdot N - \frac{n}{2n+d} \cdot N = \frac{d}{2n+d} \cdot N$. Er $A = \frac{2}{3}N$ for at have Majoriteten, saa skal Overskudet af A over det modsatte i det mindste være $= \frac{1}{3}N$.

Disse Tilfælde, hvori A skal være i geometrisk Forhold med modsatte Antal, vil jeg forbigaae, da den desuden, naar N antages som given, altid kan reduceres til den anden, hvori denne Forhold kan være en arithmetisk Forskiel.

§. 3.

Sæt at A skal i det mindste være $= N - A + D$, eller $A = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}D$. Fleerheden er da ikke det samme som den afgiørende Majoritet, med mindre at $D = 1$. Denne sidste dependerer af den første, men kan paa mange adskillige Maader være en Function deraf.

Naar $D = 1$, og N er et effent Tal, saa giver $\frac{N}{2}$ Pariteten, og $\frac{N+1}{2}$ bliver kun ½ Stemmes Overskud, som ikke kan regnes, naar der ei antages en suspenderende Stemme for at $\frac{N+1}{2}$ bliver et heelt Tal.

§. 4.

Sæt nu, at Stemmerne N, hvoraf $\frac{N+D}{2}$ udgiør Majoriteten, er hver for sig en collectiv Stemme (Stemmesamling, votum curiatum eller collectivum), som udkommer af Majoriteten blandt et vist Antal Stemmer N'. Det N' kan antages af samme Størrelse for enhver Stemme udi N, som er det simpleste; men da kan der ogsaa være et andet Tal, som giver en Deel af de udi N, og et andet for andre Dele.

Endvidere lad N' være collective Stemmer, som hver for sig komme ud af Majoriteten blandt N'', og saa fremdeles, at enhver udi N'' kommer af Majoriteten blandt Stemmeantal N''', som igien ere vota collectiva, og oprinder af Majoriteten af andre, indtil man har de sidste Stemmer, som ikke mere ere samlede, men enkelte Stemmer, som gives af de stemmende Individuer.

Dette forudsat, saa har man

1) Productet $N . N' . N'' . N''' \ldots . N^r$, som den Sum af alle individuelle Stemmer.

2) Productet $N . N' . N'' \ldots N^{r-1}$ er Summen af de collective Stemmer, som ere de første der udkomme hver af Majoriteten blandt N^r individuelle Stemmer. Samme Producter er Antallet af de første Samlinger, hvori den hele Masse af de individuelle Stemmende er fordeelt.

3) $\frac{N+D}{2} . \frac{N'+D}{2} . \frac{N''+D}{2} \ldots . \frac{N^r+D}{2}$ viser det mindste Stemmeantal, hvorved Majoriteten udi den hele Masse af individuelle Stemmer kunde opnaaes, eller Majoritetens mindste Antal.

§. 5.

Det sidst meldte (thi det øvrige er i sig selv klart nok) indsees paa følgende Maade. For at opnaae Pluraliteten i de sidste Curier, hvori samme afgiør den deciderende Majoritet, skal der i det mindste haves $\frac{N+D}{2}$ Stemmer blandt N paa den overvægtige Side. Men da til enhver af dem udfordres $\frac{N'+D}{2}$ blandt N', og til enhver af disse igien $\frac{N''+D}{2}$, og saa videre til de sidste individuelle Stemmer, saa giver Productet $\frac{N+D}{2} . \frac{N'+D}{2} . \frac{N''+D}{2} \ldots$ det mindste blandt alle $N . N' . N'' \ldots$

For Exempel naar der haves 4 collective Stemmer, som hver især oprinder af Pluraliteten blandt 25, forudsat at $D = 1$, saa udfordres $3 . 13 = 39$

$= 39$ til Majoriteten blandt 100 for det mindste, det er $\frac{4+1}{2}$ (hvortil desuden lægges $\frac{1}{2}$ for Completeringen) multipliceret med $\frac{25+1}{2}$.

Sættes isteden for 4 Curier 5, og enhver Curiat-Stemme en Følge af Pluraliteter blandt 25, saa bliver det hele Stemmetal $= 5 \cdot 25 = 125$; det som til Majoriteten udfordres for det Mindste $3 \cdot 13 = 39$, som forhen. Naar nu hver af de 125 Stemmer, som ere fordeelte i 5 Curier, igien er et votum collectivum, som udkommer af Pluraliteten blandt 25, udi de første Samlinger af de stemmende Individuer, saa har man Summen af alle Stemmer $= 5 \cdot 25 \cdot 25 = 3125$; og det mindste Majoritets-Antal $= 507$, som er ei endnu $\frac{1}{6}$ af det Hele.

Flere Exempler, især Stemmegivnings-Maader udi de Romerske Comitier, og af dem, som ved Frankeriges Constitution i Aaret 1791 bleve fastsatte, har jeg anført i en anden Afhandling udi Maanedsskrivtet Minerva, April 1793.

§. 6.

De tilbageholdene Stemmer blive ikke her tagne i Betragtning, men lad dem være S blandt N, S' blandt N', og saa videre, da har man for det mindste Majoritetstal $\frac{N-S+D}{2} \cdot \frac{N'-S'+D}{2} \cdot \frac{N''-S''+D}{2} \ldots\ldots$, og for det hele Stemmetal som forhen $N \cdot N' \cdot N'' \ldots\ldots$, samt for det afgivne Stemmetal $N-S \cdot (N'-S') \cdot (N''-S'') \ldots\ldots$

§. 7.

Naar $\frac{N+D}{2}$ udfordres til Majoritet blandt N, saa giver $\frac{N-D}{2}$ Minoriteten, eller Majoriteten af det Modsatte.

Naar Stemmernes Antal paa den ene Side (M) er mindre end $\frac{N+D}{2}$, og $> \frac{N-D}{2}$, saa haves der Paritet eller Liighed. Er der Paritet i enhver af de første Samlinger af de individuelle Stemmer, saa oprinder ingen collectiv Stemme enten med eller imod Sagen. Skeer det i en Deel af dem, saa

saa gives der bortfaldende collective Stemmer, som ikke kan regnes blandt de deraf følgende Stemmer. Paritet kommer her alene i Betragtning udi den sidste Stemmegivning, som er den afgiorende. Sættes $D = 1$, saa udkræver Pariteten $\frac{N}{2}$ Stemmer paa begge Sider, og derfor er det Mindste for Pariteten Productet $\frac{N}{2} \cdot \frac{N' + 1}{2} \cdot \frac{N'' + 1}{2} \ldots\ldots$

§. 8.

Af de sidste collective Stemmer N kan en Deel udkomme ved Pluraliteten af et vis Stemmetal, og en anden af et andet Tal, o. s. v.

Sæt at $N = a + b + c$, og at

a kommer af Pluraliteten blandt p,
b — — — blandt q,
c — — — blandt r,

saa er det hele Stemmetal $= ap + bq + cr$.

Da nu Majoriteten udfordrer $\frac{N + D}{2}$, saa sat, at naar dette Antal haves blandt dem, som dependere af de mindre Classer blandt p, q, r, saa kan den mindste Majoritets Antal endnu være mindre end efter den forrige Forudsætning, hvor $p = q = r$.

Naar $N = 4$, og den første af disse collective Stemmer kommer ud af 50, den anden af 25, den tredie af 16, og den fierde af 9, saa behøves kun $13 + 9 + 5 = 27$ blandt 100, for at Majoriteten kunde opnaaes.

§. 9.

Den mindste Majoritets Tal blandt $N . N' . N'' \ldots = M$ er efter §. 5. $\frac{N + D}{2} \cdot \frac{N' + D}{2} \ldots\ldots \frac{N^r + D}{2} = M = [D^n + (N + N' + N'' + +) . D^{n-1} + (NN' + NN'' + N' . N'' + +) . D^{n-2} + + + N . N' . N''] : 2^n$. Coefficienterne af Potenserne af D gaae frem ligesom Coefficienterne af Potenserne af x i en algebraisk Ligning (*), hvis Rødder ere $N, N', N'' \ldots$; derfor

(*) Naar udi en algebraisk Ligning, $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + + S = 0$, sættes for x et bestemt Tal, 1, 2 eller 3, eller hvilket andet man vil (t), saa bliver t^n

derfor $\frac{D^n + PD^{n-1} + QD^{n-2} + + + T}{2^n} = M$, hvor P er Summen, Q er Summen af Producterne af hvert Par, og R Summen af Producterne af hver trende, af N, N', N'' o. s. v.; T Productet af dem alle, og n viser Antallet af Factorerne N, N', N''.

§. 10.

Naar D = 1, saa bliver Forholden af det Minimum for Majoriteten til det hele Stemmetal $= \left(\frac{1}{N.N'.N''} + \frac{N + N' + N''}{N.N'.N''} + \frac{NN' + NN'' + N'.N''}{N.N'.N''} + 1\right) : 2^n$, som nærmer sig til $\frac{1}{2^n}$, naar Tallene N, N', N''.... ere af betydelig Størrelse.

Lad N være det mindste af Tallene N, N', N''...., saa bliver $\frac{Q}{T} = \frac{NN' + NN'' + N'.N'' + +}{N.N'.N''....} < \frac{p}{N}$, naar p betegner Mængden af Producterne af tvende, og $\frac{p}{T} = \frac{N + N' + N'' + +}{N.N'.N''....} < \frac{q}{N^2}$, naar q udtrykker Mængden af Tallene N, N', N'' og saa videre.

Forholden bliver derfor mindre end $\frac{1}{2^n} \cdot \left(1 + \frac{p}{N} + \frac{q}{N^2} + \frac{r}{N^n}\right)$, og næsten $= \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 + \frac{p}{N}\right)$, naar N er et stort Tal.

For Exempel N = 100, N' = 150, N'' = 180; saa er Forholden mindre end $\frac{1}{2^3} \cdot \left(1 + \frac{3}{100} + \frac{3}{(100)^2} + \frac{1}{(100)^3}\right)$, det er mindre end $\frac{1}{8} \cdot \frac{104}{100}$, eller mindre end 0,13. Naar man beregner den nøiere, befindes den $\frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{150} + \frac{1}{180} + \frac{1}{100 \cdot 150} + \frac{1}{100 \cdot 180} + \frac{1}{150 \cdot 180} + \frac{1}{100 \cdot 150 \cdot 180}\right)$, hvilket giver næsten 0,128, saa at $\frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)$ havde givet næsten det samme.

Deraf

$t^n + at^{n-1} + bt^{n-2} + + S = V$ = Productet af Rodstørrelserne af forrige Ligning, enhver af samme tagen med sit modsatte Tegn, og adderet dertil t. Denne Sætning er en umiddelbar Følge af Æqvationernes Natur, og ikke ubekiendt, men dog ei saa almindelig fremsat i Lærebøgerne, som den kunde være.

Deraf følger, at i de Tilfælde da Tallene N, N′, N″ ere større, behøver man ikke engang at nøiagtig kiende dem alle, for at finde af et af dem paa det nærmeste den Forhold, der er mellem det mindste Antal, hvormed Majoriteten kunde erholdes, og hele Stemmetallet.

§. 11.

Det hele Stemmeantal $N . N' . N''$ kan være given $= P$, og ligeledes Antallet af Factorerne N, N', N'', eller af de bestemte Gradationer, hvormed de af hinanden dependerende collective Stemmer udkomme, og der kan spørges, hvorledes P kunde blive fordeelt, saaledes at man kunde opnaae Majoriteten med det mindste Antal.

For Exempel, $N . N' = 100$; sættes $N = 4$, $N' = 25$, saa er det Mindste for Majoriteten $\frac{N+1}{2} . \frac{N'+1}{2} = 2\frac{1}{2} . 13 = 32\frac{1}{2}$. Men da til $\frac{N+1}{2} = 2\frac{1}{2}$ maa lægges $\frac{1}{2}$, for at comletere Pluraliteten af Curiatstemmer, saa maae de være $3 . 13 = 39$. Naar $N = 5$, $N' = 20$, saa bliver det samme Minimum $\frac{5+1}{2} . \frac{21}{2}$, eller $3 . 10\frac{1}{2} = 31\frac{1}{2}$, Completeringen uberegnet, men naar den lægges dertil, saaes $3 . 11 = 33$. Men naar $N = 10$, og $N' = 10$, saa faaer man $5\frac{1}{2} . 5\frac{1}{2} = 30\frac{1}{4}$, og naar Completeringen indberegnes, da $6 . 6 = 36$. Naar $N = 1$, $N' = 100$, saa udfindes til Majoriteten $\frac{1+1}{2} . \frac{101}{2} = 50\frac{1}{2}$ eller 51 Stemmer, det er det samme som at der ei gives nogle collective Stemmer, og at Sagen afgiøres umiddelbar ved Stemmegivning af de enkelte Individuer.

§. 12.

Hertil vil jeg føie følgende almindelige Sætninger, som ved denne Speculation kunde anvendes, og desuden i andre Henseender kunde blive nyttige.

1) Naar Summen af tvende positive Factorer x og y er given, $x + y = b$, saa bliver Productet $x . y$ et Maximum, saafremt $x = y$.

2) Naar

2) Naar Productet $x.y$ er bestemt (der antages som en positiv Størrelse), saa bliver Summen af de positive Factorer $x + y$ et Minimum, saafremt $x = y$.

3) Videre lad Productet $P = x.y$ være af en bestemt Størrelse, saa bliver $(x+a).(y+a) = Q$ et Minimum, naar $x = y$. Thi $Q = xy + a.(x+y) + a^2$, og da $xy + a^2$ er af en bestemt Størrelse, saa bliver Q et Minimum med $x+y$, som det er (efter No. 2) naar $x = y$.

4) Naar Summen af trende Factorer $x+y+z = b$, saa bliver Productet $x.y.z = P$ et Maximum, saafremt $x = y = z$. Og naar Productet $P = x.y.z$ er given, saa bliver Summen af Factorerne $x+y+z = b$ et Minimum, naar $x = y = z$.

5) Naar Productet $x.y.z = P$ er af en bestemt Størrelse, saa bliver Productet $(x+a).(y+a).(z+a) = Q$ et Minimum, saafremt $x = y = z$.

6) I Almindelighed naar Productet af et vis Antal Factorer (alle anseet som positive) er bestemt $P = x.y.z\ldots = q^n$, saa er Summen af alle disse n Factorer et Minimum, naar de alle ere lige store.

7) Og forudsat, at $P = x.y.z\ldots = q^n$ er en bestemt Størrelse, saa bliver $(a+q)^n = Q$ et Minimum, eller $(x+a).(y+a).(z+a)\ldots = Q$ et Minimum, naar $x = y = z$.

8) Endvidere, naar $P = q^n$, er Productet af n Factorer, $x, y, z\ldots$, saa gives Antallet af alle Producter, af tvende, trende, fire, og i Almindelighed af r, ved $\frac{n.(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}$ efter den bekiendte Combinationsregning. Summen af disse Producter bliver, saafremt Factorerne ere lige store, $= \frac{n.(n-1)\ldots(n-r+1)}{q.2\ldots r}.q^r$, og et Minimum i Forhold mod Summen af Producterne af et lige Antal Factorer, naar disse ere ulige store (*).

§. 13.

(*) Det fuldstændige Beviis for disse Sætninger vil blive her alt for vidtløftig, endog om man brugte den bekiendte Methode af Differentialregningen, hvorved Maxima og Minima bestemmes. Jeg vil alene tilføie noget, deels for at oplyse den sidste

§. 13.

Man seer deraf, at naar Summen af de individuelle Stemmer, som er Productet $N.N'.N''$, er given, vil det mindste Majoritetstal, nemlig Productet $\frac{N+D}{2}.\frac{N'+D}{2}.\frac{N''+D}{2}$, blive et Minimum absolutum, naar $N=N'=N''$, og Antallet af disse Factorer forudsættes.

Naar

almindelige Sætnings Indhold endnu mere, deels og for at vise Fremgangsmaaden ved Beviset.

1) For tvende Factorer x, y lad $P = x.y$ være af en given Størrelse $= p^2$, saa er $x+y > 2p$, naar x ikke er $= y$. Thi sættes $x = p+t$, saa bliver $y = \frac{p^2}{p+t} = p - \frac{pt}{p+t}$, altsaa $x+y = p+t+p - \frac{pt}{p+t} = 2p + \frac{t.(p+t)-pt}{p+t} = 2p + \frac{t^2}{p+t}$, som altid er $> 2p$, enten t er positiv eller negativ, da t ei kan være negativ, og tillige større end p, fordi $x = p+t$ skal være positiv.

2) For trende Factorer sæt $x.y.z = P = p^3$, en given Størrelse, saa er $\frac{p^3}{x} = yz$; tages $yz = q^2$, saa har man i Følge Foregaaende $x+y+z > x+q+q$, men $x+2q$ bliver $> 3p$. Thi sættes $q = p+t$, saa bliver $x+2q = x+2.(p+t) = \frac{p^3}{(p+t)^2} + 2.(p+t) = 2.(p+t) + p - \left(\frac{2p^2t+pt^2}{(p+t)^2}\right) = 3p + t^2 . \frac{1}{p+t} . \left(2 + \frac{p}{p+t}\right)$. Her er $p+t$ altid positiv, naar t enten er positiv eller negativ, og derfor ligeledes $x+2q > 3p$. Altsaa bliver $x+y+z > 3p$, og $xy + xz + yz = x.(y+z) + q^2 > 2xq + q^2$. Naar da igien sættes $q = p+t$, saa bliver $2xq+q^2 = (p+t)^2 + 2.\frac{p^3}{(p+t)^2} = (p+t)^2 + 2p^2 - \frac{2pt}{p+t} = 3p^2 + \frac{3p+t}{p+t}.t^2 = 3p^2 + t^2.\left(1 + \frac{2p}{p+t}\right) > 3p^2$, enten da t er positiv eller negativ.

Altsaa Summen af Producterne af tvende Factorer udaf trende x, y, z altid større end $3p^2$. Deraf følger, at ogsaa $(a+x).(a+y) > (a+p)^2$.

Endvidere bliver $(a+x).(a+y).(a+z) > (a+x).(a+q^2)$, og $(a+x).(a+q^2) = a^3 + (x+2q).a^2 + (2xq+q^2).a + xy^2 > (a+p)^3$. Thi

$$x+2q > 3q,$$
$$2xq+q^2 > 3x^2,$$
$$xq^2 = p^3.$$

Paa samme Maade kan man giøre Fremgang til flere Factorer og til høiere Potenser, ved at anvende det sædvanlige Beviis, saa at det samme følger fra enhver Potens til den nærmest høiere, og at Sætningen saaledes bliver almindelig.

Naar Stemmetallet er 729, og disse fordeles blandt 81 første Samlinger, 9 i hver, og de 81 collective Stemmer atter fordeles i 9 Curier, 9 til hver, saa bliver $\frac{N+1}{2} \cdot \frac{N'+1}{2} \cdot \frac{N''+1}{2} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Naar 729 ere fordeelte blandt 27 første Samlinger, som udgiør 27 collective Stemmer, og disse atter fordeles i trende Curier med 9 i hver, saa faaer man $\frac{N+1}{2} \cdot \frac{N'+1}{2} \cdot \frac{N''+1}{2} = \frac{3+1}{2} \cdot \frac{9+1}{2} \cdot \frac{27+1}{2} = 2 \cdot 5 \cdot 14 = 140$.

§. 14.

Det er for sig klart, at jo flere subordinerte Afdelinger af Classer eller Curier der gives, hvoraf samles de collective Stemmer til et Stemme udi de andre, des mindre vil det mindste Majoritetstal blive. Thi naar $P = N.N'.N''....$ er af en bestemt Størrelse, saa bliver $\frac{N+1}{2} \cdot \frac{N'+1}{2} \cdot \frac{N''+1}{2} .... = \frac{Q}{2^n}$ des mindre, jo større Factorernes Antal n er.

Tallet 729 opløses i 6 Factorerne $3.3.3.3.3.3$, som giver $\frac{Q}{2^n} = \left(\frac{3+1}{2}\right)^6 = 64$. Men tager man kun tvende Factorer, 27, 27, saa faaer man for det Mindste $\frac{27+1}{2} \cdot \frac{27+1}{2} = 196$.

§. 15.

Majoriteten beroer i disse Tilfælde ei alene paa Antallet, men og paa Stedet, hvor Stemmerne gives, eller af Situationen i de Curier. Dersom Antallet er endnu mindre end som det Mindste til Majoriteten udkræver, saa kan Majoriteten paa ingen Maade erholdes, men der opkommer enten blot Paritet eller Minoritet. Det Mindste for Pariteten er $\frac{N-D+1}{2} \cdot \frac{N'+D}{2} \cdot \frac{N''+D}{2} ....$, eller naar $D = 1$, da er det $= \frac{N}{2} \cdot \frac{N'+1}{2} \cdot \frac{N''+D}{2}$, men for Pariteten maa N være et effent Tal; og i dette Tilfælde har man for Majoriteten $\left(\frac{N+1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{N'+1}{2} \cdot \frac{N''+1}{2}$ for Completeringen. Forskiellen mel-

 lem

lem det Mindste for Majoriteten og for Pariteten vil derfor altid være $= \frac{N'+1}{2} \cdot \frac{N''+1}{2} \ldots$, forudsat at N′, N″ o. s. v. ere ueffen Tal, eller ogsaa at der blandt hver af N′, N″ gives en udfaldende Stemme.

§. 16.

Sættes hele Stemmetallet $= P$, det Mindste for Majoriteten $= M$, og det Mindste for Pariteten $= L$, saa bliver $P-M$ det Maximum, hvormed der endnu kan udkomme Minoritet, og $P-L$ det Maximum, hvorved Paritet kan finde Sted. Naar derfor Antallet af de bejaende Stemmer A bliver større end $P-L$, saa maa der være Majoritet paa denne Side uden Hensigt til Stemmernes Sted. Naar $A > P-M$, saa gives der enten Majoritet eller Paritet efter Stemmernes Stilling i de Classer. Naar $A < M$, saa maa der være enten Minoritet eller Paritet, efter Situationen af Stemmerne; men naar $A < L$, saa kan alene Minoriteten finde Sted uden Hensigt til Situationen.

§. 17.

Den almindelige Regel, hvorefter Stemmerne maae være fordeelte, naar Majoriteten skulde erholdes med det mindste dertil behøvende Antal, er følgende: Antallet af Stemmerne for Sagen maa være fordeelte i saa mange af de første Samlinger (hvorudi de første collective Stemmer blive frembragte) som er muelig, og saaledes, at udi enhver af disse Samlinger der haves ikke fleer end der i det mindste behøves til Pluraliteten i samme, og saa videre. De oprindende collective Stemmer skal ligeledes være fordeelte i saa mange Curier, som muligen ved samme kunde have Pluralitet.

Naar 125 Stemmer skal have Majoriteten blandt 729, som ere fordeelte i 81 første Samlinger, hver af 9 Stemmer, saa maae 25 af disse 81 have hver 5 af dem. Og da nu 81 collective Stemmer ere fordeelte i 9 Classer, hvoraf enhver har 9 Stemmer, saa skal hine 25 atter være fordeelte i 5 Classer, 5 i hver. Saaledes haves i disse 5 Classer Pluraliteten med 5 Stem-

Stemmer i enhver, og ved samme 5 Classers collective Stemmer erholdes Majoriteten blandt 9 Classer eller Curier, hvorved Sagen bliver decideret.

§. 18.

Der kan gives flere Variationer i Fordelingsmaaden for det Majoritets Minimum.

Naar 39 skal have Majoriteten blandt 100, fordeelt i 4 Curier, enhver af 25, saa skal 13 af dem være i enhver af trende. Dette kan skee paa 4 forskiellige Maader. Kaldes Curierne A, B, C, D, saa kan disse trende være enten A, B, C, eller B, C, D, eller C, D, A, eller D, B, A, efter den almindelige Regel: $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$. Naar der haves 5 Curier, og i enhver 25 Stemmer, saa erholdes Majoriteten ligeledes ved 13 Stemmer i 3 af dem, eller ved 39 blandt 125. Det kan skee paa $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ forskiellige Maader.

§. 19.

Probabiliteten for den særdeles Fordelingsmaade af Stemmer, hvorved Majoriteten erholdes, bestemmes paa følgende Maade, forudsat at ingen udvortes Aarsager, enten Tilskyndelser, Cabaler eller deslige kommer i Blanding dermed, saa at Probabiliteten kunde bestemmes efter Mængden af muelige Tilfælder.

Lad alle muelige Fordelingsmaader af 39 i 4 Curier, hvoraf enhver kunde indbefatte 25, være = T, og Antallet af de bestemte Fordelingsmaader, hvorved Majoriteten opnaaes, = S, saa er $\frac{S}{T}$ = Probabiliteten af den sidste.

Lad det hele Stemmetal være $P = N . N' . N''$, og det Mindste for Majoriteten $M = \frac{N+1}{2} . \frac{N'+1}{2} . \frac{N''+1}{2}$, saa skal 1) M saaledes fordeles mellem $N . N'$ Samlinger, at udi $\frac{N+1}{2} . \frac{N'+1}{2}$ faaes i enhver $\frac{N''+1}{2}$. Lad de muelige Fordelingsmaader af M blandt $N . N'$ Classer, hvoraf enhver

kan

kan indeholde N'', være T, og de særdeles muelige Maader, saa at udi $\frac{N+1}{2} \cdot \frac{N'+1}{2}$ kommer i enhver $\frac{N''+1}{2}$, være $= S$, saa har man Probabiliteten af det Tilfælde $= \frac{S}{T}$. 2) Men det er ikke nok. Antallet af de første udkommende collective Stemmer $\frac{N+1}{2} \cdot \frac{N'+1}{2}$ maa igien være fordeelte paa N Classer, saa at $\frac{N+1}{2}$ af dem faaer hver især $\frac{N'+1}{2}$. Sættes alle muelige Fordelingsmaader af Tallet $\frac{N+1}{2} \cdot \frac{N'+1}{2}$ igiennem N Classer, hvoraf enhver kan have N', at være $= T'$, og Antallet af de bestemte Maader, hvorved udi $\frac{N+1}{2}$ af dem i enhver kommer $\frac{N'+1}{2}$, $= S'$, saa har man Probabiliteten $\frac{S'}{T'}$, og derfor den sammensatte Probabilitet for begge Tilfælde tillige $\frac{S}{T} \cdot \frac{S'}{T'}$.

Gives der endnu flere Underafdelinger af Classer, saa bliver Probabilitetsbrøkenen ligeledes mere sammensat af saa mange, som der gives Factorer N, N', N'' mindre Een.

§. 20.

Hvis Stemmernes Antal er større end det Mindste til Majoriteten, da findes der endnu flere Maader, hvorpaa de kunde fordeles, paa det at der udi det fornødne Antal af Classer i enhver kommer det behøvende Antal Stemmer. Naar der haves 40 Stemmer blandt 100 udi 4 Curier, da gives der 16 Maader, hvorpaa de kunde fordeles, saa at Majoriteten udkommer.

I Almindelighed bliver Probabiliteten, om at Majoriteten kan erholdes med et vis given Stemmetal, bestemt ved de tvende Problemer:

1) Et given Tal P skal deles i et vis given Antal n af Dele, som følger i en given Orden A, B, C, D o. s. v., og hvoraf hver for sig kunde indeholde Delene fra Nul til et bestemt Tal N. Der skal findes de muelige forskiellige Fordelingsmaader af Tallet P, naar det deles i n Dele, med Hensyn til Ordenen af Delene.

2) Alt

2) Alt som forhen, og der skal findes Mængden af Fordelingsmaaderne med den Betingelse, at udi en bestemt Deel af N i ethvert haves $\frac{N+1}{2}$ eller derover.

§. 21.

Det første af disse Problemer reduceres til følgende: Lad A, B, C, D være prismatiske Tærninger, med saa mange Sider, at de kunde nummereres med 0, 1, 2, 3 .... N, hvor N er den største Deel, hvori det givne Tal skal fordeles. Sættes Sidernes Antal = l, saa er l = N + 1. Tærningernes Antal skal være det samme som Antallet af Delene, hvori det givne Tal T skal fordeles, men hvoriblandt 0 ogsaa kan være en Deel. Dette forudsat, saa spørges, paa hvor mange forskiellige Maader Tallet T med disse Tærninger kunde kastes? Det er i sig selv klart, at det samme Antal Stemmer kan fordeles igiennem det samme Antal af Classer eller Curier paa ligesaa mange Maader.

§. 22.

Her forudsættes, at Classerne, hvorimellem Stemmernes Antal blive fordeelte, kunde indeholde hver især et lige Antal af samme, nemlig N. For disse Tilfælde tages udi Problemet Tærninger af et lige Antal Sider. Men den almindelige Opløsning udfordrer ogsaa Methoden for de andre Tilfælde, hvorudi Classerne ere ulige; derfor maa Problemet ved Tærninger ligeledes besvares for de Tilfælde, da Sidernes Antal af de enkelte ere ulige.

§. 23.

Man har i Probabilitetsregningen almindelige Formuler, hvorefter Mængden af de forskiellige Kastningsmaader for et given Tal beregnes, naar alle Tærninger have det samme Antal Sider. (Herom kan eftersees Moivré Miscellanea Mathematica. S. 194). Men jeg har ei funden hos andre slige Formuler for de Tilfælde, da Sidernes Antal ere ulige; jeg har derfor paa min egen Maade søgt dem for begge. Her vil jeg alene fremsætte samme, og forbeholde mig at fremstille Bevisene i en anden særskildt Afhandling; thi

thi jeg har ved denne Undersøgelse tillige fundet noget, som henhører til det endnu mere udstrakte Problem angaaende Coefficienters Bestemmelse udi Polynomier, som ere Producter af andre, hvorom vi har det ypperligste, Analysis hidtil har frembragt, udi Professor Hindenburgs Skrivt: Infinitinomii Dignitatum exponentis indeterminati historia, leges ac Formulæ. 4to. Götting. 1779. Og det Opfundne kan jeg best forbinde med denne Udvikling for de følgende Formuler.

§. 24.

1) I den Række af Eenheder 1, 1, 1.... er det nte Leed altid $=$ 1.

2) I den Række af naturlige Tal 1, 2, 3, 4.... er det nte Leed $=$ n.

3) Det nte Leed udi en Række af triangulær Tal 1, 3, 6, 10.... er $= \frac{n.(n+1)}{1.2}$.

4) Det nte Leed af qvadrangulær Tal er $= \frac{n.(n+1).(n+2)}{1.2.3}$ o. s. v.

5) Det nte Leed af m=angulær Tal er $= \frac{n.(n+1).(n+2)\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots m-1}$,

hvilket alt er bekiendt om de figurerte Tal.

De naturlige Tal kan ansees som Summer af Eenheder, og som Summer af den første Orden. Men for at giøre Signaturen endnu mere analogisk, kan man ansee Summer af de naturlige Tal som de af første Orden, og saaledes sætte det nte Leed af triangulær Tal $\frac{n.(n+1)}{1.2} = S.(n)$, det nte af qvadrangulær Tal, nemlig $\frac{n.(n+1).(n+2)}{1.2.3}$, $= S^2.(n)$, og saa fremdeles det nte af m=angulær Tal $\frac{n.(n+1).(n+2)\ldots.(n+m-2)}{1.2.3\ldots.m-1} = S^{m-2}.(n)$.

§. 25.

Lad Tærningernes Antal være $=$ m, og Sidernes Antal $=$ l, samt Tallet, hvorom der spørges, paa hvor mange forskiellige Maader der kunde kastes med disse Tærninger, sættes $=$ n $-$ 1.

End-

Endvidere $1 + r + r^2 + r^3 + + + r^{l-1} = P$, og
$(1 + r + r^2 + + + r^{l-1})^m = P^m$,
saa er Coefficienten til r^{n-1} udi P^m, eller Coefficienten til det nte Leed udi P^m, det Tal, som viser, hvormange gange $n-1$ kunde udkomme, naar af enhver af m Rækker af Tallene

$0 . 1 . 2 . 3 \ldots . l-1$,
$0 . 1 . 2 . 3 \ldots . l-1$,
$0 . 1 . 2 . 3 \ldots . l-1$, og saa videre,

tages en Deel af $n-1$. For Exempel, Nul opkommer kun paa een Maade, $0 + 0 + 0$. Tallet 1 opkommer ved Additionen af $1 + 0 + 0$, ligeledes af $0 + 1 + 0$, og af $0 + 0 + 1$. Det er klart, at paa ligesaa mange adskillige Maader $n-1$ kunde kastes med m Tærninger, som $n-1$ sammensættes ved Addition af m givne Rækker; og det er det samme, som bemærkes ved Coefficienten til r^{n-1} udi P^m.

§. 25.

Formelen for Coefficienten til r^{n-1} udi P^m, eller til det nte Leed, er:
$$S^{m-2}.(n) - m.S^{m-2}.(n-l) + \frac{m.(m-1)}{1.2}.S^{m-2}.(n-2l) - \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}.S^{m-2}.(n-3l), \text{ o. s. v.}$$

Udi denne Formel viser

1) Exponenten af Summen altid et m-angulær Tal.
2) Tallene n, $n-l$, $n-2l$ o. s. v. vise det nte, $n-l$de, $n-2l$de af m-angulær Tallene.
3) Coefficienterne til Summerne udi Formulen ere de samme som til Binomium.
4) Delene af Formelen ere vexelviis positive og negative.
5) Naar $n-l$, $n-2l$, $n-3l$ bliver enten $= 0$, eller negativ, saa bortfalder denne Deel tilligemed de paafølgende. Der gives ingen Summer af dette Slags for negative Tal.

For Exempel: Hvor mange Gange kan Tallet 50 kastes med 4 prismatiske Tærninger, naar hver har 26 Sider, nummererede med 0, 1, 2 ... 25? For at finde Coefficienten til r^{50} udi $P^4 = (1 + r + r^2 + + + r^{25})^4$, sættes i Formelen $m = 4$, $l = 26$, $n - 1 = 50$, eller $n = 51$, $n - l = 51 - 26 = 25$, og man faaer da $\frac{51 \cdot 52 \cdot 53}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 4 \cdot \frac{25 \cdot 26 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{140556}{6} - 4 \cdot \frac{17550}{6} = 23426 - 11700 = 11726$. Naar $n = 39 + 1 = 40$, saa faaer man $\frac{40 \cdot 41 \cdot 42}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 4 \cdot \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 11480 - 2240 = 9240$.

§. 27.

Formelen for de Tilfælde, da Tærningerne have ulige Antal af Sider, er denne:

Lad m Tærninger have l Sider, og q Tærninger h Sider, saa er Terminus generalis for Coefficienten til r^{n-1}, eller for det nte Leed udi Productet $(1 + r + r^2 + + + r^{l-1})^m . (1 + r + r^2 + + + r^{h-1})^q = P^m . H^q$, den følgende:

$$
\begin{aligned}
S^{m+q-2}.(n) - m \,.\, & S^{m+q-2}.(n-l) \\
- q \,.\, & S^{m+q-2}.(n-h) \\
+ \frac{m.(m-1)}{1.2} \,.\, & S^{m+q-2}.(n-2l) \\
+ \frac{q.(q-1)}{1.2} \,.\, & S^{m+q-2}.(n-2h) \\
+ q \,.\, m \,.\, & S^{m+q-2}.(n-l-h) \\
- + - + &
\end{aligned}
$$

Fremgangsmaaden for flere Dele sees deraf. Coefficienterne angaaende, gielder det samme, som forhen ved den første Formel (§. 26). De ere ligeledes Binominal-Coefficienterne til Potensen $m + q$, naar $h = l$, og man tager Summen af dem. Saa findes, naar man først tager Binominal-Coefficienter for m og for q særskilt, qm eller $2 \cdot \frac{q \cdot m}{1 \cdot 2}$, da de sammenlagt skal udgiøre Binominal-Coefficienten for Potensen $m + q$.

For Exempel: Antages 4 Tærninger, hvoraf trende have 13 Sider, een 26, nummererede med Tallene fra 0 til 12, og fra 0 til 25; og Tallet er 20, for hvilket Mængden af de forskiellige Kastningsmaader søges. Her er m er $m = 3$, $q = 1$, $l = 13$, $h = 26$, og $n = 20 + 1 = 21$; ligeledes $n-l = 8$; men $n-h = 21-26$ bortfalder, da det bliver negativ.

Saaledes bliver da Coefficienten til r^{20}, udi Productet $P^3 . H$, den Størrelse $\frac{21 \cdot 22 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 3 \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1771 - 360 = 1411$.

Sættes 3 Slags Tærninger; m af l Sider, q af h Sider, t af s Sider. Tallet $n-1$ eller numerus termini n udi Productet $(1 + r + r^2 + + + r^{l-1})^m . (1 + r + r^2 + + + r^{h-1})^q . (1 + r + r^2 + + + r^{s-1})^t = P^m . H^q . G^t$, saa bliver Formelen for Terminus generalis:

$$
\begin{aligned}
S^{m+q+t-2} . (n) - m . S^{m+q+t-2} . (n-l) \\
- q . S^{m+q+t-2} . (n-h) \\
- t . S^{m+q+t-2} . (n-s) \\
+ \frac{m . (m-1)}{1 . 2} . S^{m+q+t-2} . (n-2l) \\
+ \frac{q . (q-1)}{1 . 2} . S^{m+q+t-2} . (n-2h) \\
+ \frac{t . (t-1)}{1 . 2} . S^{m+q+t-2} . (n-2t) \\
+ 2 . \frac{q . m}{1 . 2} . S^{m+q+t-2} . (n-l-h) \\
+ 2 . \frac{m . t}{1 . 2} . S^{m+q+t-2} . (n-l-s) \\
+ 2 . \frac{q . t}{1 . 2} . S^{m+q+t-2} . (n-h-s) - + =
\end{aligned}
$$

og saa fremdeles. Fremgangsmaaden vil endnu blive tydeligere ved Beviset selv.

Naar Terminus generalis til Coefficienterne udi $P^m . H^q$ antages som allerede beregnet, og ligeledes Summer af dem for at have n given og $= S$, saa bliver Terminus generalis udi $P^m . H^q . G^t$.

$$S^t . (n) - t . S^t . (n-s) + \frac{t . (t-l)}{1 . 2} . S^t . (n-2s) - +$$

§. 28.

Anførte vedkommer det første Problem udi §. 21. Til det andet Problem skal findes, hvor mange forskiellige Kastningsmaader der gives for et bestemt Tal, naar paa et bestemt Antal af de givne Tærninger skal kastes et given Tal for det mindste. For Ex. Naar 50 skal kastes med 4 Tærninger, hver af 26 Sider, saaledes, at paa trende af dem udkommer for det mindste 13 paa enhver, det er 13 eller derover.

Lad de 4 givne Tærninger være:

A med l Sider, hvorpaa det høieste Tal er $l-1$,
B - l - - - - - - $l-1$,
C - l - - - - - - $l-1$,
D - l - - - - - - $l-1$.

I Steden for 3 af dem, B, C, D, sættes trende andre, B′, C′, D′, saaledes indrettede. Da det mindste Tal, som skal udkomme paa hver af de 3, er 13, saa skal disse 3 nye Tærninger kun have $l-13$ Sider. Sæt nu, at Siderne af disse sidste ere numererede med Tallene $13+0$, $13+1$, $13+2 \ldots 13+l-14$. Naar $l=26$, saa er det høieste Tal $13+12$. Her er altsaa Tallet 13 et fast og forudsat Tal paa hver af disse trende Tærninger, B′, C′, D′, og Summen af de 3 forudsatte Tal er $3 \cdot 13 = 39$. Tærningen A bliver uforandret, og har 26 Sider numererede fra 0 til 25.

Med de 4 Tærninger, A, B′, C′, D′, kan der kastes 0 naar man ei regner de faste Tal, men der kan ikke kastes mindre med dem end 39, naar de sidste indberegnes, nemlig 13 paa hver af B′, C′, D′. Naar nu med disse 4 Tærninger kastes f. Ex. 11, uden at regne de faste Tal ind med, saa har man $11+39=50$, naar de faste Tal tillige indberegnes, saaledes at paa 3 af dem i det mindste haves 13 paa hver. Mængden af Kastningsmaaderne for 11 med disse 4 Tærninger findes af Formelen for Terminus generalis udi Productet $(1+r+r^2+ + +r^{12})^3 \cdot (1+r+r^2+ + +r^{25})$ (§. 27). Da $m=3$, $q=1$, $l=26$, $h=13$, saa faaes $n=11+1=12$, og $\frac{12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3}=364$. Dette Tal sættes $=R$, som er det samme for $11+39=50$, de faste Tal indberegnede, og viser derfor, hvormange

mange Gange 50 kunde kastes med de uforandrede Tærninger, A, B, C, D, paa den bestemte Maade, at paa enhver af B, C, D ikke udkommer mindre end 13.

§. 29.

Men da det er kun for de bestemte Tilfælde at just Tærningerne B, C, D have 13 og derover, saa spørges endvidere, hvormange adskillige Maader af lige Forandringer der kunde foretages ved 3 af de 4 givne Tærninger, saa at isteden for B, C, D, som man har omforandret til B', C', D', tages trende andre ud af de fire A, B, C, D? I Almindelighed veed man, at af 4 kunde udtages 3 paa $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$ forskiellige Gange efter Combinationslæren. Deraf kunde sluttes, at der gives $4R = 4 \cdot 364 = 1456$ Maader, hvorpaa 50 kunde kastes med 4 Tærninger, A, B, C, D, saaledes at der haves 13 og derover paa hver af de trende af dem. Men denne Slutning er ikke rigtig for ethvert Tal, som skal kastes. Sæt at Tallet er 100, som med de 4 uforandrede Tærninger A, B, C, D kan kun kastes paa een Maade, nemlig saaledes, at paa enhver udkommer 25. Tallet $100 - 39 = 61$ kan ligeledes kun kastes paa een Maade med de forandrede Tærninger A, B', C', D', de faste Tal uberegnet, nemlig naar paa enhver af dem falder det høieste, som kan falde, paa A 25, og paa de øvrige 12 paa enhver. De Variationer ved Forandringer af Tærninger, eller ved Omsætninger, maae derfor nærmere undersøges.

§. 30.

Sæt at Tallet $n-39$ bliver kastet med de forandrede Tærninger paa en bestemt Maade, saaledes at (de faste Tal uberegnede)

paa A falder den Deel a,
B' - - - b,
C' - - - c,
D' - - - d.

Naar ingen af disse Dele a, b, c, d er større end 12, saa gives der for hvert Kast, hvorudi $n-39$ har de samme Dele, i samme Orden, 4 Forandringer, naar

naar man isteden for de 3 forandrede Terninger igien substituerer de uforandrede, saa at $39+a+b+c+d$ eller n selv udkommer. Man har paa de 4 forandrede (indberegnet de faste Tal)

paa	A - - - -	a,
	B' - - -	$b+13$,
	C' - - - -	$c+13$,
	D' - - - -	$d+13$.

Derimod gives der paa de uforandrede

paa A	a	$13+a$	$13+a$	$13+a$
B	$13+b$	b	$13+b$	$13+b$
C	$13+c$	$13+c$	c	$13+c$
D	$13+d$	$13+d$	$13+d$	d

Sættes derimod, at en af Delene a, b, c, d er større end 12, saa kan det kun være den som er falden paa A; og i det Tilfælde gives der kun een af de foranførte muelige Variationer ved de uforandrede Terninger, hvorpaa ikke kan være $13+a$ paa nogen af dem, naar a er større end 12. Derfor maa der blandt de muelige Kastningsmaader af Tallet $n-39$ ved de forandrede Terninger giøres Forskiel paa de Tilfælde, hvorudi enhver af Delene udi $n-39$ er større end 12.

§. 31.

Af Productet $(1+r+r^2+\ +\ +r^{12})^3 . (1+r+r^2+\ +\ +r^{25})$ findes, hvormange Gange et Tal $(n-39)$ kunde kastes, saaledes, at kun een af Delene bliver større end 12, nemlig falder mellem 12 og 25.

Af Productet $(1+r+r^2+\ +\ +r^{12})^4$ haves alle Tilfældene, hvori ingen af Delene er større end 12, og alle disse er indholden i det fundne Antal R i §. 28.

Fradrages Mængden af disse fra hine, saa har man Mængden af Tilfældene, hvori en af Delene er større end 12, men dog kun een. Dette sidste Tal sættes $= S$.

§. 32.

§. 32.

Deles nu det forhen fundne Antal af Tilfælder for $n-39$ med de forandrede Tærninger, nemlig Tallet R i S og $R-S$, saa giver $4S+R-S$ (efter §. 30.) det søgte Antal af alle Tilfælder, hvori n kunde kastes med de givne Tærninger A, B, C, D, saaledes, at paa 3 af dem haves i det mindste 13.

Naar Tallet $n-39$ selv er mindre end 12, saa kan ingen Deel af samme overgaae 12; da er ogsaa $R=S$, og $4S=4R$, det søgte Tal. Naar $n=50$, følgeligen $n-39=11$, saa er $R=364$ (efter §. 29), og $4.364=1456$, det søgte Tal. Ligeledes naar $n=39$, og $n-39=0$, saa bliver $R=1$, $S=0$. Derfor har man 4, som er Mængden af Kastningsmaader med A, B, C, D, saaledes, at paa 3 af dem kommer 13 paa hver; disse ere, 0, 13, 13, 13: 13, 0, 13, 13: 13, 13, 0, 13: 13, 13, 13, 0. Naar Tallet $n-39$ er større end 4.12, eller over 48, saa bliver $S=0$, og $4S+R-S=R$. Der gives altsaa det samme Antal Kastningsmaader for $n-39$ med de forandrede, som for n med de uforandrede Tærninger.

§. 33.

Deraf findes Probabiliteten for at $n=39$ kastes med A, B, C, D, saaledes, at paa 3 af dem kommer 13 paa hver (efter §. 19) $\frac{4}{9240}=\frac{1}{2310}$ (§. 26). Probabiliteten for samme Tilfælde findes, naar Tallet er 50, at være $\frac{1456}{11726}=\frac{728}{5863}$, paa det nærmeste $=\frac{1}{8}$ (§. 26. 19).

§. 35.

For at oplyse Methoden, at kunne af de fundne Kastningsmaader med de forandrede Tærninger bestemme samme med de uforandrede paa en Maade, som med Forandringen af Tærningerne forud bliver antagen, og tillige for at vise en Prøve paa de forhen angivne almindelige Formelers Rigtighed, vil jeg endnu tilføie et Exempel.

Der skal findes, hvor mange Gange 50 kan kastes med 4 Tærninger, A, B, C, D, numererede som forhen, saaledes, at paa tvende af dem i det ringeste er 13 paa hver, hvilket er det samme, som om der spurgtes, hvor mange

mange Gange 50 Stemmer blandt 100, fordeelte paa 4 lige Curier, kunde give Paritet af Curiatstemmer, eller over Paritet? Isteden for de 4 Tærninger:

A med 26 Sider numererede med 0, 1....25,
B - - - - - - 0, 1....25,
C - - - - - - 0, 1....25,
D - - - - - - 0, 1....25,

tages forandrede Tærninger:

A med 26 Sider, numererede som forhen, 0, 1, 2....25,
B ligeledes,
C' med 13 Sider - - 13+0, 13+1, 13+2...13+12,
D' med 13 Sider - - 13+0, 13+1, 13+2...13+12.

§. 35.

Sættes nu en bestemt Maade, hvorpaa 50—26 udkastes med de omtuskede Tærninger (uden at regne de faste Tal 13 paa C' og D'), saa at

paa A falder a,
B - b,
C' - c, og 13+c, naar indberegnes det faste Tal,
D' - d, og tilligemed det faste Tal 13+d.

Da Omtuskningerne med 2 Tærninger udi 4 kan skee paa $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ Maader i Almindelighed, saa har man for det Tal n—26, og for samme dets Dele, a, b, c, d, i samme Orden, med de uforandrede Tærninger, 6 Gange saa mange Tilfælde for Tallet n. Disse Variationer ere

paa	A	B	C	D
1)	a	b	13 + c	13 + d
2)	13 + a	b	c	13 + d
3)	13 + a	13 + b	c	d
4)	a	13 + b	13 + c	d
5)	a	13 + b	c	13 + d
6)	13 + a	b	13 + c	d

1) Deraf

1) Deraf sees, at for alle de Tilfælde, hvori ingen af Delene a, b, c, d er større end 12, gives der 6 Gange saa mange Maader for 50 med A, B, C, D, som med A, B, C′, D′ for 50—26.

2) Naar een af Delene a, b, c, d er større end 12, f. Ex. a, saa bliver Kastningsmaaderne med A, B, C, D kun 3 Gange saa mange; thi de, hvori der skulde være $13 + a$, falde bort som umuelige.

3) I de Tilfælde, da to Dele ere hver især større end 12, som maae være a og b, bliver Kastningsmaaderne samme med A, B, C′, D′ for 50—26, som med A, B, C, D for 50.

§. 36.

Mængden af Kastningsmaaderne for $50-26=24$, saa at ingen af Delene a, b, c, d er større end 12, findes ved Terminus generalis af $(1+r+r^2+ + +r^{12})^4$. Denne er $S^2.(25)-4S^2.(25-13)=\frac{25\cdot26\cdot27}{1\cdot2\cdot3}-4\cdot\frac{12\cdot13\cdot14}{1\cdot2\cdot3}=2925-4.364=1469$. Lad dette Tal være $= S$.

Mængden af Kastningsmaaderne for $50-26=24$, hvorudi een af Delene er større end 12, findes paa denne Maade. Ved Terminus generalis for Productet $(1+r+r^2+ + +r^{12})^3.(1+r+r^2+ + +r^{25})$, som er $S^2.(n)-3S^2.(n-h)-1.S^2.(n-l)$, og hvor $n=24+1$, $h=13$, $l=26$ (og derfor $n-l$ negativ) $=\frac{25\cdot26\cdot27}{1\cdot2\cdot3}-3\cdot\frac{12\cdot13\cdot14}{1\cdot2\cdot3}=2925-3.364=1833$, findes alle Kastningsmaader, hvor een af Delene, men dog kun een af dem, kan være større end 12, det er, alle de, hvori een af dem er større end 12, og alle de, hvori ingen af dem er større end 12. Lad dette Tal udtrykkes ved R. Naar derfra drages S, eller Mængden af Maaderne, hvori ingen Deel er større end 12, saa giver R—S de, hvori een af Delene, men dog ikkun een, er større end 12.

Endvidere findes af Productet $(1+r+r^2+ + +r^{12})^2.(1+r+r^2+ + +r^{25})^2$ Kastningsmaaderne for $50-26=24$, hvorudi tvende Dele kunne, hver især, være større end 12, tilligemed alle de, hvori een af Delene større end 12, og tillige de, hvori ingen af dem er større end 12. Terminus generalis (almindelige Leeds Udtryk) af dette Product er $S^2.(n)-2.S^2.(n-26)-2.S^2.(n-13)$, fordi $m=2$, $q=2$, $l=26$, $h=13$.

S 2 Deraf

Deraf faaes for $n = 24 + 1$ Tallet $\frac{25.26.27}{1.2.3} - 2.\frac{12.13.14}{1.2.3} = 2925 - 2.364 = 2197$ (efterdi $25-26$ bliver negativ). Sættes dette Tal $= T$, og fradrages R, som efter det Foregaaende er Mængden af alle Tilfælder, hvori een af Delene er større end 12, og hvori ingen er større end 12; saa har man Antallet af de Tilfælder, hvori tvende af Delene ere, hver især, større end 12.

§. 37.

Tages nu (efter §. 35) $6S + 3.(R-S) + T-R = 3S + 2R + T$, saa har man Tallet paa de Kastningsmaader, hvorpaa Tallet 50 kunde udkomme med A, B, C, D, saaledes, at paa tvende af disse Tærninger falde i det mindste 13 paa hver. Altsaa er dette Antal Kastningsmaader $= 3.1469 + 2.1833 + 2197 = 10270$.

§. 38.

1) Naar Tallet n, hvis saaledes bestemte Kastningsmaader søges, har den Størrelse, at $n-26$ ei udgiør mere end 12, saa at ingen af Delene er større end 12, da bliver $R = S = T$, og $3S + 2R + T = 6S$.

2) Naar $n-26 > 4.12$, eller $n > 74$, saa bliver $S = 0$, da der udi Productet $(1 + r + r^2 + + + r^n)^4$ gives ingen høiere Coefficienter for høiere Potenser af r end for r^{48}.

3) Naar $n-26 > 3.12 + 25$, saa er $R = 0$, der giver ingen Coefficient til r^{62} udi Productet $(1 + r + r^2 + + + r^{12})^3.(1 + r + r^2 + + + r^{25})$.

4) Naar $n-26 > 2.12 + 2.25$, eller > 74, saa bliver ogsaa $T = 0$. I dette Tilfælde skulde man have $n > 100$, som udi dette Exempel ikke finder Sted.

5) Naar $n = 74$, saa har man det Maximum, hvori blot paa tvende af Tærningerne A, B, C, D kunde blive 13 paa hver eller derover; thi naar $n = 75$, maa i det mindste trende af dem have over 12.

§. 39.

Fremgangsmaaden i Almindelighed er denne: Der spørges, hvor mange Gange med m Tærninger af l Sider, numererede fra 0 til $l-1$, et

Tal

Tal N kunde kastes paa den Maade, at i det mindste paa p af dem bliver q paa enhver?

1) For p blandt de m givne Tærninger substitueres andre, hvis Siders Antal er $l-q$.

2) Dernæst søges Mængden af Kastningsmaaderne for Tallet $N-p.q$ med de forandrede Tærninger, som kan sættes T.

3) Denne Substitution udi n. 1 kan forandres paa saamange Maader, som p kan tages ud af m, det er $\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)....(m-p-1)}{1.2.3....p}$.

4) Udi Kastningsmaaderne T fraskilles de, hvori ingen af Delene af Tallet $N-pq$ er større end $q-1$, og de, hvorudi een af Delene, dog ikkun een, er større end $q-1$, og de, hvori tvende af Delene, men ikke flere, blive større end $q-1$, og saa videre de øvrige, hvori flere Dele blive større end $q-1$. Disse særskilte Tilfælde kan altid findes ved Terminus generalis af Producterne $(1+r+r^2+ + +r^{q-1})^t.(1+r+r^2+ + +r^{l-1})^u$ paa samme Maade, som forhen er viist, og hvor altid $t+u=m$.

5) Multipliceres de Tilfælde, hvori ingen af Delene er større end $q-1$, med $\frac{m.(m-1).(m-2)...(m-p-1)}{1.2.3...p}$, de hvori een af Delene bliver større end $q-1$, med $\frac{(m-1).(m-2)...(m-p-2)}{1.2.3...p}$, det er med Tallet, som angiver, hvormange Gange p kunde tages ud af $m-1$; thi naar een af Delene er større end $q-1$, saa bliver Variationerne, naar man af Kastningsmaaderne med de forandrede Tærninger for Tallet $N-pq$ gaaer til dem med de uforandrede for Tallet N, ikke flere end de, som udkomme, naar af $m-1$ tages p. Paa samme Maade fortfares videre: Antallet af Tilfældene, hvori tvende Dele blive større end $q-1$, multipliceres med $\frac{(m-2).(m-3)....(m-p-3)}{1.2....p}$, og dette fortsættes indtil denne Factor bliver $=1$.

6) Summen af Tallene, som ere udfundne efter No. 5, og hver især multipliceret med sin behørige Factor for Variationen, giver den søgte Mængde.

§. 40.

Hvorledes Beregningen foretages, naar Tærningerne A, B, C, D have et ulige Antal Sider, for at finde Mængden af Kastningsmaaderne for et given Tal, under Betingelse, at paa et vis Antal af dem udkommer for det mindste en bestemt Deel af Tallet paa enhver, vil jeg forbigaae. Dertil behøves Coefficienterne udi $P^m . H^q . G^t$ (§. 27). Men for at finde de Variationer, som maae tages i Betragtning, naar man af Kastningsmaaderne med de forandrede Tærninger vil slutte sig til dem med de uforandrede, maae selvsamme hver for sig beregnes, hvilket vil giøre Beregningen mere vidtløftig i de enkelte Tilfælde. Men i Hensigt til det Almindelige kan man sige, at Opløsningen af Problemet §. 20, eller Probabilitetens Bestemmelse for Pariteten og Majoriteten er muelig i alle Tilfælde, hvor den som Stemmernes Fordeling igiennem subordinerte Curier enten lige eller ulige antages.

§ 41.

Jeg har sagt, at det beregnede Exempel tillige skulde være en Prøve paa Formelens Rigtighed; det er det saaledes: Der forudsættes 100 Stemmer fordeelte igiennem 4 lige Curier, udi enhver 25. Nu er det for sig klart

1) At saa mange Gange et vis Antal af dem N kunde fordeles igiennem Curier, saa at de have Majoriteten, paa ligesaa mange Maader maae ogsaa 100 — N kunne have Minoriteten;
2) Og ligesaa mange Maader, der kan give N Minoritet, ligesaa mange kan der give Majoritet for 100 — N.
3) Ligeledes saa mange Maader, hvorpaa N giver blot Paritet, ligesaa mange er der og, hvorved 100 — N har ikke mere end Liighed.

Sættes nu M at være Antallet af Fordelingsmaaderne af N for Majoriteter; p Antallet af dem for pure Pariteter, og m Antallet af dem for Minoriteter; saa er Summen af M + p + m den af alle muelige Fordelingsmaader, der er samme for N som for 100 — N. Paritetstallet p er samme for begge. Men hvad M er for N, bliver m for 100 — N; og omvendt, hvad M er for 100 — N, bliver m for N. Naar nu 100 — N = N, eller N = 50, saa er for 50, M = m; og naar man fra alle Fordelingsmaaderne af 50 af 50 fradrager dem, hvori der udkommer Majoritet, saa har man $p + m = p + M$, det er alle Tilfælder, hvori der i det mindste haves Paritet, eller de, hvori findes bare Paritet og Majoritet tillige.

Udi §. 26 sees, at for $N = 50$ Antallet for alle Fordelingsmaader bliver - - - - 11,726.
Derfra afdrages Majoritetstilfælde - - - 1,456, efter §. 32;
saa rester - - 10,270,

som er Antallet for Pariteten i det mindste, eller for Pariteten og Majoriteten tilsammen, som det skulde være. Deraf har man for den pure Paritet $10{,}270 - 1{,}456 = 8{,}814$. Man har altsaa Probabiliteten, naar Tallet er 50, for Majoriteten $\frac{1456}{14726}$, næsten $\frac{1}{8}$,

for den pure Paritet $\frac{8814}{14726}$, næsten $\frac{6}{8}$ eller $\frac{3}{4}$,

og for Minoriteten $\frac{1456}{14726}$, næsten $\frac{1}{8}$,

som sammenlagte give Visheden eller 1.

Der gives altid slige Prøvemethoder a posteriori, hvorved man pleier at overbevises om den almindelige Raisonnements Rigtighed. Udi de mathematiske Videnskaber bruges samme meest, hvor de maaskee mindre behøvedes. Derimod bryder man sig næsten intet derom i de philosophiske Speculationer, hvor man maaskee meest behøvede det. Det har nok sine Grunde, men det har ogsaa sine Følger. Udi Mathematiken gaaer Fornuften frem med Stadighed og Vished igiennem de uendelig langt udstrakte Slutninger; i Philosophien bliver den derimod forstyrret og forvildet paa korte Strækninger, hvor den skal gaae uden Veiledning af Erfaringer.

Obser-